2.9.20 Logaritmické rovnice II

Př. 1: Vyřeš rovnice:

a) $\log_3(2x-1)=2\log_3 4-3\log_3 2$ b) $\frac{\log_4 x-1}{0,5+\log_4 3}=1$

c) $\log_3(x-1)+\log_3(x+1)=1$

a) $\log_3(2x-1)=2\log_3 4-3\log_3 2$ Podmínky: $2x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{2}$

Problém: Na pravé straně potřebujeme jenom jeden logaritmus $\Rightarrow$ pomocí pravidel pro počítání s logaritmy musíme vytvořit jediný logaritmus.

$\log_3(2x-1)=2\log_3 4-3\log_3 2$ $\log_3(2x-1)=\log_3 4^2-\log_3 2^3$

$\log_3(2x-1)=\log_3\frac{4^2}{2^3}=\log_3\frac{2^4}{2^3}=\log_3 2$ - rovnost logaritmů $\Rightarrow$ můžeme odlogaritmovat.

$2x-1=2$ $2x=3$ $x=\frac{3}{2}$ - vyhovuje podmínce $\Rightarrow$ $K=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

b) $\frac{\log_4 x-1}{0,5+\log_4 3}=1$ Podmínka: $x>0$.

$\log_4 x-1=0,5+\log_4 3$ $\log_4 x-\log_4 4=\log_4 4^{0,5}+\log_4 3$

$\log_4\frac{x}{4}=\log_4 2\cdot 3$ $\frac{x}{4}=6$ $x=24$ $K=\{24\}$

c) $\log_3(x-1)+\log_3(x+1)=1$ Podmínky: $x>1$, $x>-1$.

$\log_3\left[(x-1)(x+1)\right]=\log_3 3$ $(x+1)(x-1)=3$ $x^2-1=3$

$x^2-4=0$ $(x-2)(x+2)=0$ $x_1=2$ $x_2=-2$ - nevyhovuje $K=\{2\}$

Př. 2: Vyřeš rovnici $\log_6\sqrt{x+16}+\log_6\sqrt{x}=1$

Podmínky: $x>-16$, $x>0$

$\log_6\sqrt{x+16}+\log_6\sqrt{x}=1$ $\log_6\left[(x+16)^{\frac{1}{2}}\right]+\log_6\left[(x)^{\frac{1}{2}}\right]=1$

$\frac{1}{2}\log_6(x+16)+\frac{1}{2}\log_6 x=1$ $/\cdot 2$ $\log_6(x+16)+\log_6 x=2$

$\log_6 x(x+16)=\log_6 6^2$ $x(x+16)=36$ $x^2+16x-36=0$

$(x+18)(x-2)=0$ $x_1=-18$ - nevyhovuje podmínce $x_2=2$ $K=\{2\}$

Př. 3: Vyřeš rovnice:

a) $2\log 2x^2+4\log x^3+2\log 3=3\log x^4+2+\log x^2$

b) $\log_2\sqrt{x}+\log_2 2x^2-\log_2 3x^3=\log_2\frac{1}{x^2}+\log_2\frac{x^2}{3}$

a) $2\log 2x^2+4\log x^3+2\log 3=3\log x^4+2+\log x^2$ Podmínka: $x>0$.

$\log\left(2x^2\right)^2+\log\left(x^3\right)^4+\log 3^2=\log\left(x^4\right)^3+\log 10^2+\log x^2$

$\log\left(4x^4\cdot x^{12}\cdot 9\right)=\log\left(x^{12}\cdot 100\cdot x^2\right)$ $\qquad 4x^4\cdot x^{12}\cdot 9=x^{12}\cdot 100\cdot x^2$

$36x^2=100 \qquad x^2=\frac{25}{9} \Rightarrow x_1=\frac{5}{3},\ x_2=-\frac{5}{3}$ (tento kořen zakazují podmínky)

$K=\left\{\frac{5}{3}\right\}$

b) $\log_2\sqrt{x}+\log_2 2x^2-\log_2 3x^3=\log_2\frac{1}{x^2}+\log_2\frac{x^2}{3}$ $\qquad$ Podmínka: $x>0$.

$\log_2\frac{\sqrt{x}\cdot 2x^2}{3x^3}=\log_2\frac{x^2}{x^2 3}$ - odlogaritmujeme a pokrátíme.

$\frac{\sqrt{x}\cdot 2}{3x}=\frac{1}{3} \qquad x=\sqrt{x}\cdot 2 \quad /^2 \qquad x^2=4x \qquad x>0 \Rightarrow$ můžeme dělit x

$x=4 \qquad K=\{4\}$

Př. 4: Vyřeš rovnice:

a) $\log_2\frac{x+2}{2x-1}=-2$ $\qquad$ b) $\frac{\log_\pi(10+3x)}{\log_\pi(x+4)}=2$

a) $\log_2\frac{x+2}{2x-1}=-2$ $\qquad$ Podmínky: $\frac{x+2}{2x-1}>0 \Rightarrow$ radši vyzkoušíme až vypočtené hodnoty.

$\log_2\frac{x+2}{2x-1}=-2 \qquad \log_2\frac{x+2}{2x-1}=\log_2 2^{-2} \qquad \log_2\frac{x+2}{2x-1}=\log_2\frac{1}{4}$

$\frac{x+2}{2x-1}=\frac{1}{4} \quad /\cdot 4(2x-1) \qquad 4(x+2)=2x-1 \qquad 4x+8=2x-1$

$2x=-9 \quad x=-\frac{9}{2}$ - ještě vyzkoušet podmínku $\frac{x+2}{2x-1}=\frac{-4,5+2}{2\cdot(-4,5)-1}=\frac{-2,5}{-10}>0$

$K=\left\{-\frac{9}{2}\right\}$

b) $\frac{\log_\pi(10+3x)}{\log_\pi(x+4)}=2$ $\qquad$ Podmínky: $10+3x>0 \Rightarrow x>-\frac{10}{3},\ x+4>0 \Rightarrow x>-4$.

Problém: Nemůžeme udělat vlevo jeden logaritmus, nemáme vzorec, který by dělat z podílu logaritmů jeden logaritmus.

$\Rightarrow$ Vynásobíme rovnici jmenovatelem, abychom druhý logaritmus dostali na pravou stranu.

$\frac{\log_\pi(10+3x)}{\log_\pi(x+4)}=2 \quad /\cdot\log_\pi(x+4) \qquad \log_\pi(10+3x)=2\log_\pi(x+4)$

$\log_\pi(10+3x)=\log_\pi(x+4)^2 \qquad 10+3x=(x+4)^2 \qquad 10+3x=x^2+8x+16$

$0=x^2+5x+6 \qquad (x+2)(x+3)=0 \qquad x_1=-2 \qquad x_2=-3 \qquad K=\{-3;-2\}$

Př. 5: Petáková:
strana 35, cvičení 11 b), d), f), g), h), i)
strana 35, cvičení 12 c)
strana 35, cvičení 13 a), c)